### Антагонистические игры

Игра 2-х лиц с нулевой суммой

*W1(x1 x2) = W2(x1 x2) = 0*

*W1(x1 x2) = - W2(x1 x2)*

Выигрыш одного игрока = проигрышу другого (интересы противоположны, игра антогонистичекаяэ

Пример Игра Де-Монмора.

Отец прячет монету в руке. Если сын угадал, то получает выигрыш в 2 монеты, если рука правая, и 1 монету, если рука левая. Не угадал – выигрыш равен 0. Соответственно проигрыши у отца.

Платежная матрица ОТЕЦ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | П | Л |
| П | 2 | 0 |
| Л | 0 | 1 |

СЫН

Поведение игроков изолированное, нет смысла договариваться. Наоборот, нужно скрывать свою стратегию.

Если использовать принципы для изолированного поведения, получим:

* Доминируемых стратегий нет.
* Оптимальный гарантированный результат

max min=∅ сын

min max=1 отец

Игра не имеет решения в чистых стратегиях..

Чтобы скрыть свою стратегию лучший способ – использовать генератор случайных чисел, то есть выбирать свою стратегию случайным образом.

Отгадав стратегию противника, игрок получает преимущество. Если игрок выигрывает стратегию на основе разумных рассуждений, то его противник может восстановить ход его мыслей и получить преимущество.

Чтобы выбор был непредсказуем - он должен быть случайным.

Пусть х – вероятность выбора правой руки, а (1-х) - вероятность выбора левой руки. То же для отца

Сын: (П) х Отец: (П) у

(Л) 1-х (Л)1-у

x∈[0,1] , y∈[0,1]

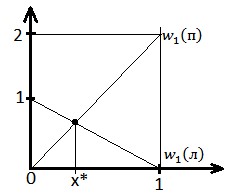
Найдем ожидаемый результат для сына, при применении стратегии правой и леаой рукируки:

*w1(П)* = 2 ∗ 𝑥 + 0 ∗ 𝑥 = 2𝑥

*w1(Л)*) = 0 ∗ (1 − 𝑥) + 1 ∗ (1 − 𝑥) = 1 − 𝑥

Сначала найдем гарантированный результат, потом оптимальный, затем оптимальную стратегию.

Строим гарантированный результат для сына:



x – вероятность с которой первый

игрок принимает стратегию правой руки

(1-x) – вероятность стратегии левой

#### руки

Оптимальный гарантированная стратегия: x\* = 1/3

Оптимальный гарантированный результат\* w1\* = 2/3

Аналогично может и рассуждать и отец, тогда у\* = 1/3 и w2\* = - 2/3 .

Если каждый из игроков придерживается этой стратегии, то он не может получить выигрыш меньше, чем 2/3, а второй меньше, чем 2/3. Если один изменит стратегию – то его результат будет хуже, это значит, что второй игрок получит для себя дополнительную выгоду. Ни одному не выгодно отходить от гарантированной оптимальной стратегии, так как его результат только ухудшится (это ситуации равновесия в смешанных стратегиях).

На самом деле, стратегий может быть сколько угодно (мы рассматривали 2)

Игрок 1 –n≥2 – стратегий; Игрок 2 – m≥2 – стратегий – получится матрица nxm.

Что ее решить такую игру, каждый игрок находит свою оптимальную гарантированную стратегию и оптимальный гарантированный результат.

Если оптимальный гарантированный результат для 1 игрока = оптимальному гарантированному результату (со знаком минус) для другого игрока, то говорят, что такая игра с нулевой суммой имеет ситуацию равновесия в смешанных (вероятностных)стратегиях стратегиях, если:

𝑣1 = 𝑚𝑎𝑥𝑚𝑖 1

𝑣2 = 𝑚𝑖𝑥𝑚𝑎 2

𝑣1 = −𝑣2 – оптимальный гарантированный результат

Общий случай:

𝑥 = (𝑥1𝑥2, … , 𝑥𝑛) – смешанная стратегия, где xi – вероятность применения первым игроком 𝑖-ой чистой стратегии.



То же самое для второго игрока:

𝑦 = (𝑦1𝑦2, … , 𝑦𝑛) ∑𝑛𝑖=1

(𝑥, 𝑦) – исход игры в смешанных стратегиях, W(x,y) выигрыши первого игрока, и проигрыши другого. Чистая стратегия – частный случай смешанной стратегии при условии, что все, кроме вероятности для одного x и одного у, равны 0.

В общем случае, если выполняется неравенство



то в игре с нулевой суммой существует точка равновесия (х\*,у\*) или седловая точка.

Эта точка похожа на ситуацию равновесия по Нэшу (ни одному игроку не выгодно менять свою стратегию).

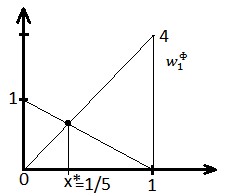
Вернемся к игре «семейный спор»:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Футбол | |  | Балет | |  | | x |
| Футбол |  | 4 |  | 0  0 | |  | |
| 1 |
| Балет | 0  0 | |  |  | 1 | |  | 1-x | |
| 4 | |

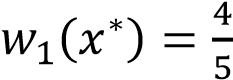
y 1-y

Две ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Найдем гарантированный результат в смешанных стратегиях для первого игрока:



x\* =  - опт. гарантированная стратегия первого игрока

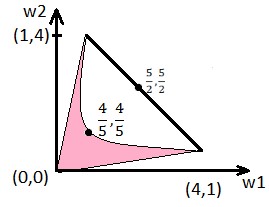
 - оптимальный гарантированный

#### результат

То же самое для второго игрока.

Мы использовали принцип гарантированного результата для изолированного поведения. Игроки действуют независимо друг от друга, никаких коопераций и коалиций нет.

Представим, что они могут договориться.



В чистых стратегиях у нас следующие исходы: [0,0], [4,1], [1,4]. Когда мы используем смешанные стратегии при изолированном поведении и применяем принцип гарантированного результата, то множество вариантов возможных исходов будет выглядеть так (впадина на графике). Этот результат ].

Как только мы договариваемся, создаем кооперацию, у нас возникает дополнительное множество исходов для смешанных стратегий (цветная часть). На жирной линии любой исход оптимален по Парето. Поэтому в качестве результата мы вполне можем выбрать любой на этой линии. (например, которой соответствует середине этого отрезка). При том мы соблюдаем равноправие игроков, каждый получит одинаковый выигрыш, которой будет лучше, чем при изолированном поведении (5/2 .5/2).

Однако этот выигрыш не является точкой равновесия. Каждый из игроков может захотеть «подвинуть» этот исход в свою пользу.

В игре де Монмора кооперация невозможна, т.к. игра антогонистическая.